Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Inspectoratul Şcolar Judeţean Constanţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Neptun-Mangalia, 13 Aprilie 2009

CLASA a IX-a – SOLUŢII şi BAREMURI

Problema 1. Fie ABC un triunghi oarecare şi k un număr real nenul. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului considerăm punctele variabile M, respectiv N, astfel încât

$$\frac{MB}{MA} - \frac{NC}{NA} = k.$$

Arătaţi că dreapta MN trece printr-un punct fix.

Soluţie. Fie d paralela prin A la dreapta BC şi P, respectiv Q, punctele de intersecţie a dreptei MN cu dreptele BC, respectiv d. În cele ce urmează, XY desemnează segmentul *orientat* de la X la Y. Conform teoremei lui Menelaus,

$$\frac{PC}{PB} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NC}{NA}.$$

.... **2 puncte**

Ţinând cont de relaţia din enunţ şi de faptul că $PC = PB + BC$, din egalitatea de mai sus rezultă că

$$\frac{MA}{MB} \cdot PB = -\frac{1}{k} \cdot BC.$$

.... **3 puncte**

Din asemănarea triunghiurilor orientate MAQ şi MBP, obţinem

$$AQ = -\frac{MA}{MB} \cdot PB,$$

deci $AQ = (1/k)BC$. Prin urmare, punctul Q este fix.

.... **2 puncte**

Soluţie Alternativă. Fie $u = MB/MA$ şi $v = NC/NA$, segmentele fiind orientate conform convenţiei din soluţia precedentă; deci $u \neq 1$ şi $v \neq 1$.

În raport cu o origine oarecare a planului, vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C sunt legaţi printr-o relaţie de forma $\mathbf{r}_B = x\,\mathbf{r}_A + y\,\mathbf{r}_C$, unde x şi y sunt nişte numere reale. Vectorii de poziţie ai punctelor M şi N sunt

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_M &= -\frac{u}{1-u}\,\mathbf{r}_A + \frac{1}{1-u}\,\mathbf{r}_B \\ &= \frac{x-u}{1-u}\,\mathbf{r}_A + \frac{y}{1-u}\,\mathbf{r}_C, \\ \mathbf{r}_N &= -\frac{v}{1-v}\,\mathbf{r}_A + \frac{1}{1-v}\,\mathbf{r}_C.\end{aligned}$$

....**3 puncte**

Dreapta MN trece printr-un punct fix dacă şi numai dacă există o origine a planului, nesituată pe dreapta AC, astfel încât vectorii $\mathbf{r}_M$ şi $\mathbf{r}_N$ să fie coliniari, oricare ar fi $u \neq 1$ şi oricare ar fi $v \neq 1$. Acest lucru este posibil dacă şi numai dacă există două numere reale x şi y, astfel încât $u - x = vy = (u-k)y$, oricare ar fi $u \neq 1$ şi oricare ar fi $v \neq 1$; adică, $u(1-y) = x - ky$, oricare ar fi $u \neq 1$, ceea ce impune $y = 1$ şi $x = k$. Prin urmare, dreapta MN trece printr-un punct fix O al planului.

....**4 puncte**

În raport cu această origine,

$$\mathbf{r}_B = k\,\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C = k(\mathbf{r}_B + \mathbf{a}) + (\mathbf{r}_B + \mathbf{c}),$$

unde $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{c}$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor A şi C în raport cu B. Obţinem $\mathbf{r}_B = -\mathbf{a} - (1/k)\mathbf{c}$. În raport cu B, vectorul de poziţie al punctului fix este deci $\mathbf{a} + (1/k)\mathbf{c}$.

Problema 2. Fiind date numerele reale $a, b, c, d > 0$ şi $e, f, g, h < 0$, demonstraţi că inegalităţile $ae+bc > 0$, $ef+cg > 0$, $fd+gh > 0$, $da+hb > 0$, nu pot fi simultan îndeplinite.

Soluţie. Inegalităţile se pot scrie $bc > a(-e)$, $(-e)(-f) > c(-g)$, $(-g)(-h) > (-f)d$, $da > (-h)b$, cu toţi factorii numere reale strict pozitive. Înmulţind membru cu membru aceste inegalităţi se obţine $bcefghda > aecgfdhb$, absurd, căci cei doi membri au aceeaşi valoare $abcdefgh$.

....**7 puncte**

Soluţie Alternativă. Punctele $A(a,b)$, $B(e,c)$, $C(f,g)$ şi $D(d,h)$ se află în cadranele I, II III, respectiv IV. Cel puţin unul dintre unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ are măsura mai mare sau egală cu $90°$. Produsul scalar al vectorilor care formează acel unghi este deci mai mic sau egal cu zero, de unde concluzia.

....**7 puncte**

Problema 3. Fiind date numerele reale pozitive distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, şi o rearanjare $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a lor, demonstraţi inegalitatea

$$(a_1^2 + b_1)(a_2^2 + b_2) \cdots (a_n^2 + b_n) \geq (a_1^2 + a_1)(a_2^2 + a_2) \cdots (a_n^2 + a_n).$$

Soluţie. Dacă vreunul dintre a_i este zero, concluzia este evidentă. Fără a restrânge generalitatea, putem atunci presupune că $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
.... **1 punct**

Dintre toate rearanjările x_1, x_2, $\ldots$, x_n ale numerelor a_1, a_2, $\ldots$, a_n, alegem una astfel încât produsul

$$(a_1^2 + x_1)(a_2^2 + x_2) \cdots (a_n^2 + x_n)$$

să aibă valoarea minimă.
.... **2 puncte**

Fie c_1, c_2, $\ldots$, c_n o astfel de rearanjare şi $i < j$ doi indici oarecare. Produsul corespunzător rearanjării $c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n$ este deci mai mic sau egal cu cel corespunzător rearanjării $c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_i, \ldots, c_n$.
.... **2 puncte**

Rezultă că $(a_i^2 + c_i)(a_j^2 + c_j) \leq (a_i^2 + c_j)(a_j^2 + c_i)$, adică $(a_i^2 - a_j^2)(c_j - c_i) \leq 0$, de unde deducem că $c_i < c_j$. Deci $c_k = a_k$, oricare ar fi indicele k, de unde inegalitatea din enunţ.
.... **2 puncte**

Soluţie Alternativă. Pornim de la inegalitatea $x^2 + y \geq y(x+1)^2/(y+1)$, adevărată pentru x, y numere reale pozitive, fiind echivalentă cu $(x - y)^2 \geq 0$.
.... **5 puncte**

Înmulţind inegalităţile corespunzătoare perechilor (a_i, b_i), $1 \leq i \leq n$, obţinem inegalitatea din enunţ.
.... **2 puncte**

Problema 4. Fiind date secvenţele ordonate de numere reale distincte $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ şi $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 2$, considerăm mulţimea

$$\{a_i + b_j \ ; \ 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m\}.$$

Demonstraţi că această mulţime are exact $n + m - 1$ elemente dacă şi numai dacă ambele secvenţe sunt în progresie aritmetică de aceeaşi raţie.

Soluţie. Una dintre implicaţii este imediată, căci pentru raţia comună d rezultă $a_i = a_1 + (i-1)d$ şi $b_j = b_1 + (j-1)d$, deci $a_i + b_j = a_1 + b_1 + (i+j-2)d$, în total $n + m - 1$ valori distincte.
.... **1 punct**

Pentru implicaţia inversă, să remarcăm că $a_1 + b_1 < a_2 + b_1 < \cdots < a_n + b_1 < a_n + b_2 < \cdots < a_n + b_m$, deci mulţimea sumelor conţine întotdeauna cel puţin $n + m - 1$ valori.

.... **1 punct**

Vom proceda prin inducţie după $n + m$. Cazul $n = m = 2$ conduce la $a_1 + b_1 < a_1 + b_2, a_2 + b_2 < a_2 + b_2$, de unde $a_1 + b_2 = a_2 + b_2$, adică $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$.

.... **2 puncte**

Pentru $n + m > 4$, cel puţin una dintre valorile n, m (fie ea m) este mai mare decât 2. Atunci secvenţa obţinută prin eliminarea lui b_m conţine $m - 1$ elemente, şi se pierde cel puţin suma $a_n + b_m$, maximul care nu mai poate fi obţinut, deci rămân cel mult $n + m - 2$ valori posibile ale sumelor. Conform cu prima observaţie făcută, acesta este numărul minim posibil de valori, deci rămân exact $n + (m - 1) - 1$ valori. Din ipoteza de inducţie rezultă că secvenţele sunt în progresie aritmetică de aceeaşi raţie. În mod analog, prin eliminarea lui b_1 se pierde cel puţin suma $a_1 + b_1$ (minimul care nu mai poate fi obţinut), cu concluzie identică. Dar atunci secvenţele iniţiale sunt în progresie aritmetică de aceeaşi raţie.

.... **3 puncte**